262 - Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Cadre : On se place dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sur lequel sont définies $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et X des variables aléatoires réelles.

I Modes de convergence

1) Convergence presque sûre

Définition 1. On dit que (X_n) converge presque sûrement vers X si :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

Autrement dit, si l'ensemble où X_n ne converge pas vers X est négligeable. On note alors $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$.

Remarque 2. *La condition de convergence presque sûre équivaut à :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} \{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$

Exemple 3. *Dans $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, $X_n = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}[}$ converge presque sûrement vers 0.*

Exemple 4. *Supposons que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, et posons $U_n = \sum_{i=1}^n 2^{-i} X_i$. Alors $U_n \xrightarrow{p.s.} U$, où U est une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$.*

Théorème 5 (Borel-Cantelli)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite d'évènements.*

(i) Si $\sum \mathbb{P}(A_n) < \infty$, $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

(ii) Si $\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et les A_n sont indépendants, $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Exemple 6. *On lance une infinité de fois une pièce équilibrée, on obtiendra presque sûrement une infinité de fois 42 piles consécutifs.*

Exemple 7. *Supposons que $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et sont indépendantes. Alors $\frac{\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i}{\ln n}$ converge presque sûrement vers 1.*

2) Convergence en probabilités

Définition 8. On dit que (X_n) converge en probabilité vers X si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$$

On note alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Exemple 9. *Dans $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, $X_n = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}[}$ converge en probabilités vers 0.*

Proposition 10. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$.*

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y) \qquad X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y \qquad f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$$

3) Convergence dans L^p

Définition 11. Si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et X sont dans L^p, pour $p \in [1, +\infty[$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers X dans L^p si $\lim_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_p = 0$, ou de manière équivalente $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$. On note $X^n \xrightarrow{L^p} X$.

Exemple 12. *Supposons que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ et sont indépendantes. Alors $\mathbb{E}[|X^p|] = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc X_n converge dans L^p.*

Proposition 13 (Markov)**.** *Soit X est positive.*

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

Corollaire 14 (Bienaymé-Tchébychev)**.** *Soit X est de carré intégrable.*

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]\,| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^n]}{t^n}$$

Proposition 15 (Hölder)**.** *Soient $X \in L^p$ et $Y \in L^q$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

$$\mathbb{E}[|XY|] \leqslant \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}}\, \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}$$

Définition 16. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est équi-intégrable si les X_n sont intégrables et que :

$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}^\star} \int_{\{|X_i|>c\}} |X_i| d\mathbb{P} = 0$$

Exemple 17. *Une famille finie de variables aléatoires intégrables est équi-intégrable.*

4) Convergence en loi

Définition 18. On dit que (X_n) converge en loi vers X si, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\lim_n \mathbb{E}\left[\varphi(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right]$. On note alors$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Remarque 19. *On peut prendre les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et X définies sur des espace probabilisés différents.*

Exemple 20. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0,\sigma_n^2\right)$ avec $\lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \sigma$, alors X_n converge en loi vers $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$.*

Théorème 21 (Lévy)**.** *$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $\varphi_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X$.*

Proposition 22. *Si les X_n sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ si, et seulement si, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(X_n = k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(X = k\right)$.*

Proposition 23. *$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si, et seulement si, $F_{X_n} \to F_X$ en tout point de continuité de F_X.*

II Liens entre les modes de convergence

Proposition 24. *Soient $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$. On a :*

$$X_n \xrightarrow{L^\infty} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^q} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{L^p} X$$

Proposition 25. $X_n \xrightarrow{p.s.} X \ \Rightarrow\ X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Contre-exemple 26. *Supposons que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ et sont indépendantes. Alors X_n converge en probabilités et dans L^p vers 0, mais ne converge pas presque sûrement.*

Proposition 27. $X_n \xrightarrow{L^p} X \ \Rightarrow\ X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Théorème 28. *La convergence en probabilité implique la convergence presque sûre d'une sous-suite vers la même limite.*

Corollaire 29. *La convergence dans L^p implique la convergence presque sûre d'une sous-suite vers la même limite.*

Théorème 30. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \ \Rightarrow\ X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Remarque 31. *La réciproque est vraie si la variable limite est constante, mais pas en général : si $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, alors $1 - X \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, mais pas en probabilités.*

Théorème 32. *Si les X_n sont intégrables, on a équivalence entre :*

(i) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *est équi-intégrable.*

(ii) $X_n \xrightarrow{L^1} X$ *et* X *est intégrable.*

Contre-exemple 33. *Dans $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, $X_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}[}$ converge en probabilités vers 0, mais pas dans L^p.*

III Théorèmes limites

1) Lois des grands nombres

Théorème 34 (Loi faible des grands nombres)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de même loi qu'une variable aléatoire réelle X. Alors :*

$$\mathbb{E}\left[|X|\right] < +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\left[X\right]$$

Théorème 35 (Loi forte des grands nombres)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de même loi qu'une variable aléatoire réelle X. Alors :*

$$\mathbb{E}\left[|X|\right] < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}\left[X\right]$$

Application 36 (Monte-Carlo)**.** *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et de loi $\mathcal{U}\left([0,1]\right)$. Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)dt \ p.s.$$

2) Théorème central limite

Théorème 37 (Théorème central limite)**.** *On suppose que les X_n sont indépendants, identiquement distribués et de carré intégrable. Alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mathbb{E}\left[X_i\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,1\right)$$

Application 38. *On suppose que les X_n sont indépendants, identiquement distribués et de loi $\mathcal{B}\left(p\right)$ pour $p \in [0,1]$ inconnu. Le théorème central limite donne un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour p en fonction de la moyenne empirique $\widehat{p_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i$. Il s'agit de :*

$$IC_\alpha = \left[\widehat{p_n} \pm \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right]$$

où q_t est le quantile d'ordre t de $\mathcal{N}\left(0,1\right)$.

Application 39. *Dans la méthode de Monte-Carlo, on obtient un intervalle de confiance de probabilité asymptotique $1-\alpha$ de longueur proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.*

Théorème 40. *Soit $(X_{n,j})_{n \in \mathbb{N}^\star, j \in [\![1, M_n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0,1\}$, avec $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite croissante de $\mathbb{N}^\star$ qui tend vers $+\infty$. On pose $\mathbb{P}\left(X_{n,j} = 1\right) = p_{n,j}$ et $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} X_{n,j}$. On suppose de plus que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{1 \leqslant j \leqslant M_n} p_{n,j} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} = \lambda > 0$$

Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\lambda\right)$.

Développements

- Théorème central limite et intervalle de confiance (37,38) [BL07]
- Loi des évènements rares de Poisson (40) [Ouv09]

Références

[BL07] Philippe Barbe and Michel Ledoux. *Probabilité.* EDP Sciences, 2007

[Ouv08] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités : Tome 1.* Cassini, 2008

[Ouv09] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités : Tome 2.* Cassini, 2009

Annexes

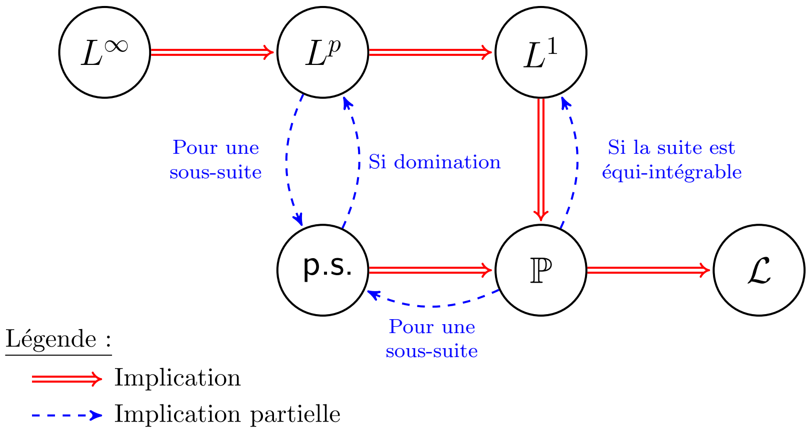

Figure 1 – Liens entre les modes de convergence